令和６年度　入学者選抜学力試験　数学（前期）解答例

［1］

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列なので，その一般項は $a_n = 2^{n-1}$ と表される。その最初の n 項の和は，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

となる。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は等差数列より，初項 b，公差 d とすると，その一般項は

$$b_n = b + (n-1)d$$

と表される。したがって，

$$c_n = a_n b_n = 2^{n-1}\{b + (n-1)d\}$$

である。いま，$c_2 = 12$, $c_4 = 112$ なので，

$$\begin{cases} 2(b+d) = 12 \\ 2^3(b+3d) = 112 \end{cases}$$

が成り立つ。これを b と d について解くと，$b = 2, d = 4$ となる。したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，$b_n = 4n - 2$ である。

(3) (2) の結果より，数列 $\{c_n\}$ の一般項は，$c_n = 2^{n-1}(4n-2) = 2n \cdot 2^n - 2^n$ である。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

とおくと，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k \cdot 2^k - 2^k) = 2\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k - \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k - 2(2^n - 1)$$

となる。そこで

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$$

を求める。

$$T_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$$

であるから，両辺に 2 をかけることにより，

$$2T_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

ゆえに

$$T_n - 2T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$$

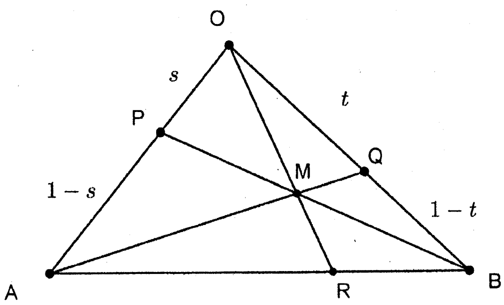
$$T_n = n \cdot 2^{n+1} - 2(2^n - 1)$$

となる。よって

$$S_n = 2\{n \cdot 2^{n+1} - 2(2^n - 1)\} - 2(2^n - 1) = (2n-3)2^{n+1} + 6$$

令和6年度　入学者選抜学力試験　数学（前期）解答例

［2］



(1) 点 M は線分 AQ 上にあるので，

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}+(1-x)t\vec{b}$$

点 M は線分 PB 上にあるので，

$$\overrightarrow{OM}=y\overrightarrow{OP}+(1-y)\overrightarrow{OB}=ys\vec{a}+(1-y)\vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ は $\vec{0}$ ではなく，平行でもないから，

係数を比較して

$$\begin{cases} x=ys \\ (1-x)t=1-y \end{cases}$$

これを解いて，

$$y=\frac{1-t}{1-st},\ 1-y=\frac{t(1-s)}{1-st}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OM}=\frac{s(1-t)}{1-st}\vec{a}+\frac{t(1-s)}{1-st}\vec{b}$$

(2) $\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{OR}$ より 点 R は 辺 AB を $t(1-s):s(1-t)$ に内分する。ゆえに

$$\Delta\mathrm{OAR}=\frac{t(1-s)}{t(1-s)+s(1-t)}\Delta\mathrm{OAB}=\frac{t(1-s)}{(s+t)-2st}$$

(3) $s=t$ のとき 点 R は 辺 AB を 1:1 に内分する，つまり，点 R は 辺 AB の中点であるから，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{s}{1+s}\vec{a}+\frac{s}{1+s}\vec{b}=\frac{2s}{1+s}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{2s}{1+s}\overrightarrow{OR}$$

$$\therefore\ \Delta\mathrm{MAB}=\left(1-\frac{2s}{1+s}\right)\Delta\mathrm{OAB}=\frac{1-s}{1+s}$$

よって

$$\frac{1-s}{1+s}=\frac{1}{3}\qquad\therefore\ s=\frac{1}{2}$$

令和６年度　入学者選抜学力試験　数学（前期）解答例

[３]

(1) さいころを３回投げてＰが原点にいるためには，５以上の目が３回のうち１回出ればよい。よって，求める確率は，

$$ {}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9} $$

(2) さいころを６回投げてＰが原点にいるためには，５以上の目が６回のうち２回出ればよい。よって，求める確率は，

$$ {}_6C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^4 $$

である。Ｐが，さいころを６回投げて原点にいて，かつ３回投げた時点でも原点にいるためには，５以上の目が，最初の３回中１回，後半の３回中１回出ればよいので，その確率は，

$$ {}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot{}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2 $$

である。よって求める条件付き確率は，

$$ \frac{{}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot{}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2}{{}_6C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^4}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5} $$

(3) Ｐの座標が９以上であるためには，５以上の目が６回のうち５回または６回出ればよい。

５回出る確率は

$$ {}_6C_5\left(\frac{2}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^1 $$

６回出る確率は，

$$ {}_6C_6\left(\frac{2}{6}\right)^6 $$

である。よって求める確率は

$$ {}_6C_5\left(\frac{2}{6}\right)^5\left(\frac{4}{6}\right)^1+{}_6C_6\left(\frac{2}{6}\right)^6=\frac{4}{243}+\frac{1}{729}=\frac{13}{729} $$

令和６年度　入学者選抜学力試験　数学（前期）解答例

[４]

(1) 求める確率は

$$ {}_6C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^5 + {}_6C_0\left(\frac{4}{6}\right)^6 = \frac{256}{729} $$

(2) 5 以上の目が出る回数 X は二項分布 $\mathrm{B}\left(600, \frac{1}{3}\right)$ に従うから，

$$ \text{期待値 } \mathrm{E}(X) = 600 \cdot \frac{1}{3} = 200 $$

$$ \text{標準偏差 } \sigma(X) = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} $$

(3)期待値 200，標準偏差 $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ の正規分布 $\mathrm{N}\left(200, \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$ に従うとすると，

$$ \frac{\mathrm{E}(X) - 180}{\sigma(X)} = \frac{200 - 180}{\frac{20\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} = 1.73 $$

より，正規分布表の 1.73 の値を見て，求める確率は $0.5 - 0.4582 = 0.0418$ となる。

[５]

(1)　$4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$ なので

$$f(x)=\begin{cases}4x^3+4x^2-1 & \left(x<-\frac{1}{2},\frac{1}{2}<x\right)\\ 4x^3-4x^2+1 & \left(-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

(i) $x<-\frac{1}{2}$ または $\frac{1}{2}<x$ のとき

$$f'(x)=12x^2+8x$$

より，$f'(x)=0$ の解は

$$12x^2+8x=0 \Leftrightarrow x\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$$

より $x=-\frac{2}{3}$

(ii) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ のとき

$$f'(x)=12x^2-8x$$

より，$f'(x)=0$ の解は

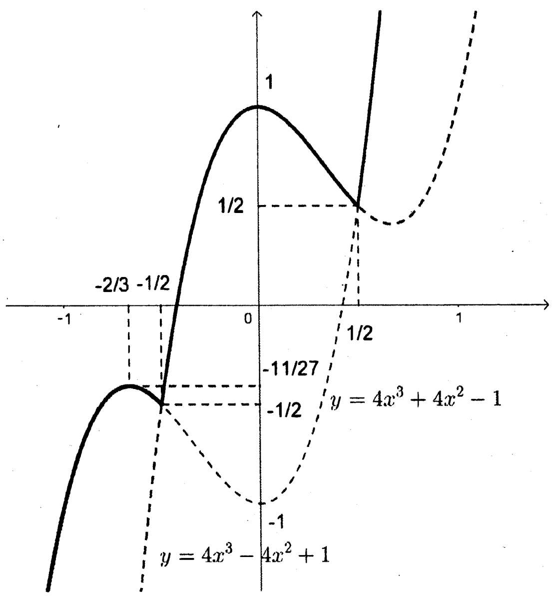
$$12x^2-8x=0 \Leftrightarrow x\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$$

より $x=0$

(i),(ii)より増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↗	$-\frac{11}{27}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗

したがって C の概形は下図の実線部分になる。



(2) C と直線 $y=x$ との共有点の x 座標は $f(x)-x=0$ を満たす。

$$f(x)-x=\begin{cases}4x^3+4x^2-x-1 & \left(x<-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}<x\right)\\ 4x^3-4x^2-x+1 & \left(-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

より

$$4x^3+4x^2-x-1=0$$
$$(x+1)(2x-1)(2x+1)=0$$
$$\therefore\ x=-1,\pm\frac{1}{2}$$

$$4x^3-4x^2-x+1=0$$
$$(x-1)(2x-1)(2x+1)=0$$
$$\therefore\ x=1,\pm\frac{1}{2}$$

x の定義域を考慮すると，共有点の x 座標は

$$x=-1,\pm\frac{1}{2}$$

したがって，共有点は

$$(-1,-1),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

(3) (1) のグラフより C と直線 $y=x+k$ が４個の共有点を持つのは，直線 $y=x+k$ が C の $x<-\dfrac{1}{2}$ の部分と接するときである。この接点の座標を $(a,f(a))$ とする。この時 $f(x)=4x^3+4x^2-1$ であり接線の傾きは１であるから $f'(x)=1$ を解くと，

$$12x^2+8x=1\quad\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{6}$$

$x<-\dfrac{1}{2}$ をみたすのは $x=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}$ $\therefore a=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{6}$

また

$$4x^3+4x^2-1=(12x^2+8x-1)\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)-\frac{5}{9}x-\frac{8}{9}$$

と多項式の割り算をすれば，

$$f(a)=-\frac{5}{9}a-\frac{8}{9}=\frac{-38+5\sqrt{7}}{54}$$

であり，$f(a)=a+k$ から

$$k=f(a)-a=\frac{-38+5\sqrt{7}}{54}-\frac{-2-\sqrt{7}}{6}=\frac{-10+7\sqrt{7}}{27}$$

［6］

(1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$ の両辺を x について微分すると，

$$\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}\frac{dy}{dx}=0$$

したがって，$y\neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$$

が得られる。このとき，求める接線の方程式は

$$y-b=-\frac{2a}{b}(x-a)\cdots(*)$$

となるので，$a=1,b=2$ を代入すると

$$y=-x+3$$

が得られる。

(2) $\mathrm{P}(a,b)$ における接線の方程式は $(*)$ より

$$2ax+by=2a^2+b^2$$

ここで

$$\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{6}=1 \Leftrightarrow 2a^2+b^2=6\cdots(**)$$

であることから

$$2ax+by=6$$

である。よって，接線と曲線の交点の x 座標は，次の方程式の解になる。

$$2ax+b\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}\right)=6$$

$$\frac{b}{3}x^2+2ax+\frac{3b}{2}-6=0\cdots(***)$$

P における C の接線が曲線 $y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3}{2}$ と接するとき，方程式 $(***)$ は重解を持つので，その判別式は 0 になるから

$$a^2-\frac{b}{3}\left(\frac{3b}{2}-6\right)=0$$

となる。$(**)$ を用いて，

$$\left(3-\frac{b^2}{2}\right)-\frac{b}{3}\left(\frac{3b}{2}-6\right)=0$$

$$b^2-2b-3=0 \therefore b=-1,3$$

が得られる。

$b=3$ のとき $(**)$ を満たす実数 a は存在しない。

$b=-1$ のとき $(**)$ より $a=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

したがって，

$$(a,b)=\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},-1\right),\left(\frac{\sqrt{10}}{2},-1\right)$$