令和６年度　　入学者選抜学力試験　数学（後期／経済・DS）解答例

〔1〕 0 以上の実数 t に対し, 関数 $f(x) = -x^2 + 4x - 2t|x| + 2$ の最大値を $M(t)$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $M(1)$ と $M(3)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 関数 $M(t)$ を求めよ。

---

(1) $t = 1$ のとき,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & (x \geqq 0) \\ -x^2 + 6x + 2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x-1)^2 + 3 & (x \geqq 0) \\ -(x-3)^2 + 11 & (x < 0) \end{cases}$$

したがって $x \geqq 0$ のとき

$$f(x) \leqq f(1) = 3$$

$x < 0$ のとき $f(x)$ は単調増加となるので

$$f(x) < -(0-3)^2 + 11 = 2$$

ゆえに $M(1) = 3$。

$t = 3$ のとき,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & (x \geqq 0) \\ -x^2 + 10x + 2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x+1)^2 + 3 & (x \geqq 0) \\ -(x-5)^2 + 27 & (x < 0) \end{cases}$$

したがって $x \geqq 0$ のとき $f(x)$ は単調減少となるので

$$f(x) \leqq f(0) = 2$$

$x < 0$ のとき $f(x)$ は単調増加となるので

$$f(x) < -(0-5)^2 + 27 = 2$$

ゆえに $M(3) = 2$。

(2) $x \geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + (4-2t)x + 2 \\ &= -\{x - (2-t)\}^2 + (2-t)^2 + 2 \end{aligned}$$

したがって $2 - t \geqq 0$, すなわち $t \leqq 2$ のとき $x \geqq 0$ の範囲で

$$\begin{aligned} f(x) &\leqq (2-t)^2 + 2 \\ &= t^2 - 4t + 6 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$t > 2$ のとき $f(x)$ は $x \geqq 0$ で単調減少となるのでこの範囲で

$$f(x) \leqq f(0) = 2 \quad \cdots ②$$

$x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + (4+2t)x + 2 \\ &= -\{x - (2+t)\}^2 + (2+t)^2 + 2 \end{aligned}$$

$t \geqq 0$ なので $f(x)$ は $x < 0$ で単調増加となる。したがって $x < 0$ の範囲で

$$f(x) < -0^2 + (4+2t) \cdot 0 + 2 = 2 \quad \cdots ③$$

①, ②, ③および $t \geqq 0$ であることより

$$M(t) = \begin{cases} t^2 - 4t + 6 & (0 \leqq t \leqq 2) \\ 2 & (t > 2) \end{cases}$$

〔2〕 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ として，座標平面上の点 $\mathrm{A}_n(x_n, y_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を次のように定義する。

$$(x_1, y_1) = (1, 0),$$
$$(x_n, y_n) = (\alpha x_{n-1} - \beta y_{n-1}, \beta x_{n-1} + \alpha y_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

原点 O を基準とする A_n の位置ベクトルを $\overrightarrow{a_n}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ のなす角を θ とする。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right|$ を $\left|\overrightarrow{a_n}\right|$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{a_n}$ と $\overrightarrow{a_{n+1}}$ のなす角 θ_n は n によらず一定になることを示せ。

(4) $\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の面積を n を用いて表せ。

---

(1) $\overrightarrow{a_2}$ を成分表示すると，

$$\overrightarrow{a_2} = (x_2, y_2) = (\alpha, \beta) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{a_2}\right|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{16} + \frac{4+2\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{a_1} = (1, 0)$ なので

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a_2}\right|} = \sqrt{2}\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

A_1 は x 軸上の点，A_2 は第１象限内の点なので $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。したがって

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-2\alpha^2} = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2)
$$\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right| = \sqrt{{x_{n+1}}^2 + {y_{n+1}}^2} = \sqrt{(\alpha x_n - \beta y_n)^2 + (\beta x_n + \alpha y_n)^2} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)({x_n}^2 + {y_n}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left|\overrightarrow{a_n}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\overrightarrow{a_n}\right|$$

(3) $\cos\theta_n$ が n によらず一定であることを示せばよい。

$$\cos\theta_n = \frac{\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{a_{n+1}}}{\left|\overrightarrow{a_n}\right|\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right|} = \frac{x_n(\alpha x_n - \beta y_n) + y_n(\beta x_n + \alpha y_n)}{\left|\overrightarrow{a_n}\right|\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right|}$$
$$= \frac{\alpha({x_n}^2 + {y_n}^2)}{\left|\overrightarrow{a_n}\right|\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right|} = \frac{\alpha\left|\overrightarrow{a_n}\right|^2}{\left|\overrightarrow{a_n}\right|\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right|} = \frac{\alpha\left|\overrightarrow{a_n}\right|}{\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right|} = \sqrt{2}\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

よって θ_n は n によらず一定。

(4) (3) より $\theta_n = \theta$。よって $\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a_n}\right|\left|\overrightarrow{a_{n+1}}\right|\sin\theta$$

(2) より $\left\{\left|\overrightarrow{a_n}\right|\right\}$ は初項 $\left|\overrightarrow{a_1}\right| = 1$, 公比 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の等比数列なので，

$$\left|\overrightarrow{a_n}\right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

したがって，

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2^{n+2}}$$

令和６年度　入学者選抜学力試験　数学（後期／経済・DS）解答例

〔3〕 赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている袋がある。この袋から玉を 1 個取り出して, 赤玉であればそのまま袋に戻し, 白玉であれば袋に戻さず新たに赤玉を 1 個袋に入れるという試行を, 袋の中が全て赤玉になるまで繰り返す。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 2 回目で白玉を取り出し, かつ 6 回目で繰り返しが終わる確率を求めよ。

(2) 6 回目で繰り返しが終わる確率を求めよ。

(3) n 回目で繰り返しが終わる確率を n を用いて表せ。

---

(1) 白玉を○, 赤玉を●で表すと, 題意の取り出し方は●○●●●○ということになる。1 個目の白玉を取り出すまでは袋の中に赤玉 1 個と白玉 2 個, 1 個目の白玉を取り出した以降は袋の中に赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている。つまり 1 個目の○の確率は $\frac{2}{3}$, 2 個目の○の確率は $\frac{1}{3}$, 1 個目の○より前の●の確率は $\frac{1}{3}$, 後の●の確率は $\frac{2}{3}$ である。したがって求める確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^4}{3^6}=\frac{16}{729}$$

(2) 6 回目で繰り返しが終わるということは, 6 回目に 2 個目の白玉を取り出すということ。そのような取り出し方は○●●●●○, ●○●●●○, ●●○●●○, ●●●○●○, ●●●●○○の 5 通りである。k 回目に 1 個目の白を取り出す確率は (1) と同様に考えて

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{6-k}}{3^6}$$

したがって求める確率は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}\frac{2^{6-k}}{3^6}&=\left(\frac{2}{3}\right)^6\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^6-\frac{2}{3^6}\\&=\frac{2^6-2}{3^6}=\frac{62}{729}\end{aligned}$$

(3) $1\leq k<n$ とする。(2) と同様に考えると, 求める確率は白玉を k 回目と n 回目に取り出す確率

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-k}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{n-k}}{3^n}$$

を $k=1$ から $n-1$ まで足したものである。

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{n-k}}{3^n}&=\left(\frac{2}{3}\right)^n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{2}{3^n}\\&=\frac{2^n-2}{3^n}\end{aligned}$$

また 1 回目で繰り返しが終わることなないのでその確率は 0 であり, 上式に $n=1$ を代入したものに等しい. したがってすべての n に対し成り立つ.

令和６年度　　入学者選抜学力試験　数学（後期／経済・DS）解答例

〔4〕 3 本の当たりくじを含む 6 本のくじから，はじめに A 君がくじを 1 本引き，残りのくじから B 君が 2 本引く。A 君，B 君が引いた当たりくじの本数をそれぞれ X, Y とするとき，次の問いに答えよ。なお，$\sqrt{5} = 2.24$ とし，付表の正規分布表を利用してよい。

(1) X と Y のとる値のすべての組 (x, y) と，それぞれの組に対応する確率 $P(X = x, Y = y)$ を求めよ。

(2) X と Y の積の確率変数 $W = XY$ について，期待値 $E(W)$ と分散 $V(W)$ を求めよ。

(3) この試行を 170 回繰り返す。k 回目の試行で A 君，B 君それぞれが引いたあたりくじの本数の積を W_k とする。$W_1, W_2, \cdots\cdots, W_{170}$ の標本平均

$$\overline{W} = \frac{1}{170}(W_1 + W_2 + \cdots\cdots + W_{170})$$

が 0.5 より大きくなる確率を，正規分布による近似を用いて求めよ。

---

(1) X のとる値は, 0, 1, Y のとる値は 0, 1, 2 であるから，とる値のすべての (x, y) 組は

$$(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)$$

のいずれかで，これら以外の (x, y) では $P(X = x, Y = y) = 0$ となる。ここで，A 君が引くとき 6 本中 3 本が当たりくじであるから，

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$X = 0$ のとき，$Y = 0, 1, 2$ となる条件つき確率はそれぞれ，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{1}{10}, \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{5}, \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{10}$$

したがって乗法定理より

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$
$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$
$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

$X = 1$ のときも同様に考えると，

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$
$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$
$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

(2) $W = XY$ のとる値は 0, 1, 2 で，各値をとる確率は，

$$P(W = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{3}{10},$$
$$P(W = 2) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{20}$$

また余事象の確率から

$$P(W = 0)$$
$$= 1 - \{P(W = 1) + P(W = 2)\} = \frac{13}{20}$$

よって，W の期待値と分散は，

$$E(W) = 0 \cdot \frac{13}{20} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{2}{5}$$
$$E(W^2) = 0 \cdot \frac{13}{20} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$
$$V(W) = E(W^2) - E(W)^2$$
$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25 - 8}{50} = \frac{17}{50}$$

(3) (2) より，母平均 $\frac{2}{5}$，母分散 $\frac{17}{50}$ の母集団からの大きさ 170 の無作為標本とみなすことができるので，$\overline{W}$ の分布を正規分布 $N\left(\frac{2}{5}, \frac{17}{50 \cdot 170}\right)$，すなわち $N\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{500}\right)$ で近似し，

$$P\left(\overline{W} > 0.5\right) = P\left(\frac{\overline{W} - \frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{1}{500}}} > \frac{0.5 - \frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{1}{500}}}\right)$$
$$= P(Z > \sqrt{5})$$
$$= P(Z > 2.24)$$
$$= 0.5 - 0.4875 = 0.0125$$

〔5〕 a, b を正の定数とし, 放物線 $C : y = x^2$ と直線 $\ell : y = ax + b$ の交点を P, Q とする。点 R が C 上を P から Q まで動くとき, 次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さを a, b を用いて表せ。

(2) C と ℓ で囲まれた図形の面積を a, b を用いて表せ。

(3) $\triangle$PQR の面積の最大値とそのときの R の座標を，a, b を用いて表せ。

---

(1) P, Q の x 座標をそれぞれ α, β (ただし $\alpha < \beta$) とすると，線分 PQ の長さ d は

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2} \\ &= \sqrt{(\beta-\alpha)^2\{1+(\beta+\alpha)^2\}} \end{aligned}$$

α, β は二次方程式 $x^2 - ax - b = 0$ の解であるから,

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} - \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \\ &= \sqrt{a^2+4b} \end{aligned}$$

$$\beta + \alpha = a$$

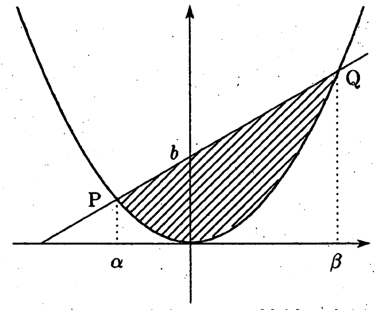
したがって

$$d = \sqrt{(a^2+4b)(a^2+1)}$$

(2) 求める図形の面積は

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta \left(ax + b - x^2\right) dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \\ &= \frac{(a^2+4b)^{\frac{3}{2}}}{6} \end{aligned}$$

(3) C と ℓ のグラフは以下のようになっている。



この図より, R を通る C の接線の傾きが ℓ の傾き a と等しくなるとき, $\triangle$PQR の面積が最大になることがわかる。

$$(x^2)' = 2x = a \iff x = \frac{a}{2}$$

であるから, R の座標は $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{4}\right)$。このとき，R と ℓ の距離は

$$\frac{\left|\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} + b\right|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+4b}{4\sqrt{a^2+1}}$$

となる。したがって $\triangle$PQR の面積の最大値は,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4b}{4\sqrt{a^2+1}} \cdot \sqrt{(a^2+4b)(a^2+1)} \\ &= \frac{(a^2+4b)^{\frac{3}{2}}}{8} \end{aligned}$$

〔6〕 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

---

(1) $f(x)=(1-x^2)$ とすると，区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(1-x^2)\,dx$$
$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $\sum$ の計算公式より，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)\,n\,(2n-1)$$

となるので，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{n-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)\,n\,(2n-1)\right\}$$
$$=1-\frac{1}{6n^2}(2n^2-3n+1)$$
$$\to\frac{2}{3}\quad(n\to\infty)$$

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ とすると，区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x=\sin\theta$ とおくと，

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

x と θ の対応は以下のようにとれる。

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta\geq 0$ であるから，被積分関数は

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

と表すことができる。よって，

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$